Journal of Libyan Academy Bani Walid 2025
مجلة الأكاديمية الليبية بني وليد
e-ISSN: 3104-3860
Volume 1, Issue 4, 2025, Pages: 88-101
Website: https://journals.labjournal.ly/index.php/Jlabw/index

Fourier Series and its Applications in Solving Partial Differential Equations

Rabeaa Hussain Emhamed [1], Tahane Ali Mohammed [2], Zaynab Ahmed Khalleefah [3*]
[1,2,3] Department of Mathematics, Faculty of Science, Al-Asabaa, University of Gharyan, Libya
Email: zaynab.zuwaliyah@gu.edu.ly

متسلسلة فورييه وتطبيقاتها في حل المعادلات التفاضلية الجزئية

ربيعة حسين إمحمد المغيربي [1]، تهاني علي محمد حسن [2]، زينب أحمد خليفة زوليه [3*]
[1،2،3] قسم الرياضيات، كلية العلوم الأصابعة، جامعة غريان، ليبيا

Received: 23-07-2025	Accepted: 29-09-2025	Published: 21-10-2025
Copyright: © 2025 by the authors. This article is an open-access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution (CC BY) license (https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).

Abstract
This paper aims to review the concept of Fourier series, its coefficients, and its applications in finding solutions to certain Partial Differential Equations (PDEs). Specifically, the study addresses the applications of Fourier series in solving the one-dimensional homogeneous heat equation for a finite rod, the two-dimensional Laplace equation on a rectangle, as well as the non-homogeneous partial differential equation (Poisson's equation).

Keywords: Fourier Series, Fourier Coefficients, Parseval's Identity.

الملخص
تهدف هذه الورقة إلى استعراض مفهوم متسلسلة فورييه ومعاملاتها وتطبيقاتها في إيجاد حل لبعض المعادلات التفاضلية الجزئية .تتناول الدراسة تحديداً تطبيقات متسلسلة فورييه في حل معادلة الحرارة المتجانسة ذات البعد الواحد لقضيب محدود، ومعادلة لابلاس ذات البعدين على مستطيل، بالإضافة إلى المعادلة التفاضلية الجزئية غير المتجانسة (معادلة بواسون).

الكلمات المفتاحية :متسلسلة فورييه، معاملات فورييه، متطابقة بارسفال.

المقدمـــــــــة

متسلسلة فورييه هي طريقة تتيح كتابة أي دالة رياضية دورية في شكل متسلسلة أو مجموع من دوال الجيب وجيب التمام مضروب بمعامل معين.
والاسم مشتق من اسم العالم الفرنسي جوزيف فورييه تقديراً لأعماله الفذة في المتسلسلات المثلثية.
تستخدم تطبيقات متسلسلة فورييه على نطاق واسع في الرياضيات والهندسة والفيزياء والإلكترونات وقد كان شرح فورييه شديد التخصص مما جعله عصياً على الفهم ولكن ما فعله بالأساس أنه استغل العلاقة بين مجموع متسلسلة وتكامل دالة لقد أدرك أن قابلية تمثيل الدوال الاختيارية تماماً بواسطة متسلسلات

مثلثية يتطلب اهمال النظرية الأساسية لحساب التفاضل والتكامل وتعريف التكامل هندسياً بدلاً من مجرد أنه عكس التفاضل.

متسلسلة فورييه: *Fourier Series*

لتكن الدالة $f(x)$ معرفة على الفترة $(L\ ,-L)$ وخارج هذه الفترة بالعلاقة:

$$f(x) = f(x+2L)$$

أي أن الدالة $f(x)$ لها دورة $T = 2L$ فإن متسلسلة فورييه المناظرة للدالة $f(x)$ تعطى بالعلاقة:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L}) \dots\dots\dots (1)$$

حيث $a_n\ , b_n$ تعريف بمعاملات فورييه *Fourier Coefficients* وتعطى بالعلاقة:

$$\left.\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx\ , n = 1\ ,2\ ,3\ \dots\dots\dots \\ b_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx\ , n = 1\ ,2\ ,3\ \dots\dots \end{aligned}\right] \dots\dots\dots (2)$$

إذا كانت $f(x)$ لها دورة $2L$ فإن المعاملات $a_n\ , b_n$ يمكن تحديدها بتكافؤ من العلاقتين:

$$\left.\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{L}\int_{c}^{c+2L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx \\ b_n &= \frac{1}{L}\int_{c}^{c+2L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx \end{aligned}\right] \dots\dots\dots (3)$$

حيث c عدد حقيقي وفي الحالة الخاصة عندما $c = -L$ فإن (3) تتحول إلى (2) ولتحديد a_0 في (1) نستخدم (2) أو (3) حيث تكون $n = 0$ وعليه فإن (2) تعطى:

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)dx$$

مع ملاحظة أن هذا الحد الثابت في (1) يكون مساوياً للمقدار:

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)dx$$

والذي هو متوسط الدالة $f(x)$ على الدورة.

ملاحظة:

1- إذا كانت $L = \pi$ فإن المتسلسلة (1) والمعاملات في (2) و(3) تكون بسيطة ودورة الدالة في هذه الحالة هي 2π .

2- بعض التكاملات المهمة:

$$\int_{-L}^{L}\cos\frac{m\pi x}{L}\cos\frac{n\pi x}{L}dx = \int_{-L}^{L}\sin\frac{m\pi x}{L}\sin\frac{n\pi x}{L}dx = \int_{L}^{0}\begin{matrix} 0 & m \neq n \\ L & m = n \end{matrix}$$

$$\int_{-L}^{L} \sin\frac{m\pi x}{L} cos\frac{n\pi x}{L} dx = 0$$

شروط ديريشلت *Diriehilet Condition*:

1- $f(x)$ معرفة ووحيدة القيمة في الفترة $(-L\ ,L)$.

2- $f(x)$ تكون دورية خارج الفترة $(-L\ ,L)$ بدورة $2L$.

3- $f(x)$ و $f'(x)$ تكون مستمرتان مقطعياً *Piecewise Continuous* في الفترة $(-L\ ,L)$

حينئذ فإن المتسلسلة (1) تتقارب إلى:

1- الدالة $f(x)$ إذا كانت x هي نقطة الاستمرار.

2- $\frac{f(x+0)+f(n-0)}{2}$ إذا كانت x هي نقطة عدم الاستمرار.

هذه الشروط كافية ولكن ليست ضرورية ويعني هذا أن الاستمرار للدالة ليست وحدها تضمن تقارب متسلسلة فورييه.

تقارب متسلسلات فورييه:

هناك شروط لازمة لتقارب فورييه للدالة f إلى الدالة f نفسها وهذا ستساعدنا مبرهنة مهمة تسمى مبرهنة بارسيفال *Parseval*.

مبرهنـــــــــة: صيغة بارسيقال *Parseval*:

لنفرض أن متسلسلة فورييه المناظرة للدالة f تتقارب بانتظام إلى الدالة f على $(-L\ ,L)$ عندئذ يكون:

$$\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}(f(x))^2dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(an^2 + bn^2)}{a_n^2 \quad b_n^2}$$

البرهـــــــان: إذا كانت

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos(\frac{n\pi x}{L}) + b_n \sin(\frac{n\pi x}{L})\right]$$

على $(-L\ ,L)$ وبضرب الطرفين في $f(x)$ والتكامل حداً حداً على $(-L\ ,L)$ يكون لدينا:

$$\int_{-L}^{L}[f(x)]^2dx = \frac{a0}{2}\int_{-L}^{L} f(x)dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx + bn \int_{-L}^{L} f(x \sin\frac{m\pi x}{L}\sin\frac{n\pi x}{L}dx\right]$$

الآن

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} \mathrm{f(x)}\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx$$

وبذلك يكون:

$$La_n = \int_{-L}^{L} \mathrm{f(x)} \cos(\frac{n\pi x}{L})\, dx$$

كذلك

$$Lb_n = \int_{-L}^{L} \mathrm{f(x)} \sin(\frac{n\pi x}{L})\, dx$$

و

$$La_0 = \int_{-L}^{L} \mathrm{f(x)}\, dx$$

وبالتعويض نحصل على

$$\int_{-L}^{L} (\mathrm{f(x)})^2\, \mathrm{dx} = (\frac{{a_0}^2}{2})\ L\ + L \sum_{n=1}^{\infty} (\ {a_n}^2 + \ {b_n}^2)$$

وهذا يعني أن

$$\frac{1}{L} \int_{-L}^{L} (\mathrm{f(x)})^2\, \mathrm{dx} = \frac{{a_0}^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\ {a_n}^2 + \ {b_n}^2)$$

عندما يكون التكامل

$$\int_{-L}^{L} (\mathrm{f(x)})^2\, dx$$

موجود، فإن المتسلسلة العددية

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\ {a_n}^2 + \ {b_n}^2)$$

متقاربة وهذا يعني أن

$$\lim_{n\to\infty} ({a_n}^2 + \ {b_n}^2\ ) = 0$$

ومع ذلك نجد أن

$$\lim_{n\to\infty} {a_n}^2 \ = \lim_{n\to\infty} {b_n}^2 = 0$$

متسلسلات فورييه للدوال الدورية المستمرة:

نظريـــــــــــــــة

إذا كانت متسلسلة فورييه للدالة الدورية المستمرة f تتقارب بانتظام على $[-\pi\ ,\ \pi]$ فإنها تتقارب إلى f.

متسلسلات فورييه للدوال القابلة للاشتقاق مقطعياً:

تعريـــــــــــــف

تقول بأن الدالة f على الفترة $[a\ ,\ b]$ قابلة للاشتقاق مقطعياً (*Differenttiiable Piecewse*) على $[a\ ,\ b]$ إذا كانت الدالة مستمرة مقطعياً (*Continuous Piecewise*) على $[a\ ,\ b]$ ويمكن تقسيم الفترة $[a\ ,\ b]$ إلى عدد منته من الفترات $(x_{i-1}\ ,x_i)$ حيث:

أ- $f^{-}(x)$ موجودة ومحدودة لكل x في $(x_{i-1}\ ,x_i)$.

ب- النهايتان:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_i+h-fx_i^{+}}{h}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(x_{i+1}-h)-f(x_{iH^{-}})}{h}$$

موجودتان ومحدودتان.

متسلسلات فوريه ومعاملات أويلر:

إذا كانت $f(x)$ دالة دورية دورتها P لنفرض إمكانية نشر الدالة $f(x)$ في متسلسلة دوال مثلثية على النحو:

$$f(x)=\ C_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nwx+\ b_n\sin nwx)\ \dots\dots\dots(6)$$

حيث $P=\frac{2\pi}{w}$ (أصغر دورة) والمطلوب الآن هو تعيين المعاملات $a_n\ ,b_n\ ,c_0$:

أولاً c_0 :

بتكامل طرفي المعادلة (6) من $\propto$ إلى $\propto+P$ حيث $\propto$ عدد حقيقي اختياري نجد أن:

$$\int_{\propto}^{\propto+P}\mathrm{f(x)}\,dx=\ C_0\int_{\propto}^{\propto+P}dx$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\int_{\propto}^{\propto+P}\cos\mathrm{nwx}\,dx+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\int_{\propto}^{\propto+P}\sin nwx\,dx$$

إن أقل دورة لكل من $\cos nwx$ و $\sin nwx$ هي $\mathrm{P}=\frac{2\pi}{w}$ وبذلك يكون تكامل أي منها في الفترة $(\propto\ ,\propto+P)$ هو المسافة بين بيان أي منهم ومحور خلال فترة كاملة ومن المعلوم أن هذه المسافة نصفها موجب ونصفها سالب وبذلك تنعدم جميع التكاملات التي على الصورة:

$$\int_{\propto}^{\propto+P}\sin\mathrm{nwx}\,dx\ ,\int_{\propto}^{\propto+P}cos\,nwx\,dx$$

ثانياً a_m :

بضرب طرفي المعادلة (6) في $\cos mwx$ حيث m عدد صحيح ثابت ثم التكامل من $\propto$ إلى $\propto+P$ نجد أن:

$$\int_{\propto}^{\propto+P}\mathrm{f(x)}\cos\mathrm{nwx}\,dx=\ C_0\int_{\propto}^{\propto+P}cos\,mwx\,dx$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\int_{\propto}^{\propto+P}\cos nwx\cos mwx\,dx$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{\propto}^{\propto+P} \sin nwx \cos mwx \, dx \ \ldots\ldots\ldots (7)$$

ولكن:

$$\int_{\propto}^{\propto+P} \cos mwx \, dx = 0$$

$$\int_{\propto}^{\propto+P} \sin \mathrm{nwx} \cos mwx \, dx = \frac{1}{2} \int_{\propto}^{\propto+P} (\sin(n+m)\, wx + \sin(n-m)\, wx)\, dx = 0$$

$$\int_{\propto}^{\propto+P} \cos \mathrm{nwx} \cos mwx \, dx = \frac{1}{2} \int_{\propto}^{\propto+P} (\cos(n+m)\, wx + \cos(n-m)\, wx)\, dx = 0$$

حيث $n \neq m$.
أما عندما $n = m$ فإن:

$$\int_{\propto}^{\propto+P} \cos^2 \mathrm{mwx}\, dx = \frac{1}{2} \int_{\propto}^{\propto+P} (cos2\, mwx + 1)\ dx$$

والتكامل الأول:

$$\int_{\propto}^{\propto+P} cos2\, mwx\ dx = 0$$

أما الجزء الثاني:

$$\int_{\propto}^{\propto+P} 1\, dx = P$$

وعلى ذلك:

$$\int_{\propto}^{\propto+P} \cos^2 mwx\ dx = \frac{P}{2}$$

أي أن:

$$a_m = \frac{2}{P} \int_{\propto}^{\propto+P} f(x) \cos mwx\ dx\ , m = 1\ , 2\ \ldots\ldots\ldots (8)$$

ثالثاً b_m :
بنفس الطريقة المتبعة في إيجاد a_m نضرب الطرفين في sin mwx وتكامل $\propto$ إلى $\propto + P$ نتحصل على:

$$b_m = \frac{2}{P}\int_{\propto}^{\propto+P} f(x)\sin mwx\ dx\ , m = 1\ , 2\ \dots\dots\dots (9)$$

إذا استبدلنا الرمز n بدلاً من m نكتب معاملات اويلر *Euler Formulas* على النحو التالي:

$$C_0 = \frac{1}{P}\int_{\propto}^{\propto+P} f(x)\,dx$$

$$a_n = \frac{2}{P}\int_{\propto}^{\propto+P} f(x)\cos nwx\ dx\ , \forall n = 1\ , 2\ \dots\dots\dots (10)$$

$$b_n = \frac{2}{P}\int_{\propto}^{\propto+P} f(x)\sin nwx\ dx$$

المتسلسلة (6) تسمى متسلسلة فورييه أو مفكوك فورييه ومعاملاتها المعطاة بالمعادلة (10) تسمى أيضاً معاملات فورييه.

وبوضع $t = wnx$ في المعادلة (10) يمكن كتابة معاملات فورييه على النحو التالي:

$$C_0 = \frac{1}{2\pi n}\int_{-n\pi}^{n\pi} f(\frac{t}{wn})dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi n}\int_{-n\pi}^{n\pi} f(\frac{t}{wn})\cos t\,dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi n}\int_{-n\pi}^{n\pi} f(\frac{t}{wn})\sin t\,dx$$

إذا كانت $f(x)$ دالة زوجية فإن معاملات المعادلة (10) (باتخاذ $\propto = \frac{-P}{2}$) تصبح:

$$C_0 = \frac{2}{P}\int_{0}^{2} f(x)dx$$

$$a_n = \frac{4}{P}\int_{0}^{2} f(x)\cos nwx\,dx\ \dots\dots\dots (12)$$

$$b_n = 0$$

حيث $f(x)$ دالة زوجية أما إذا كانت الدالة فردية فإن:

$$\left.\begin{matrix} C_0 = 0 \\ a_n = 0 \end{matrix}\right\} \text{فردية دالة } f(x)\ \dots\dots\dots (13)$$

$$b_n = \frac{4}{P}\int_0^{\frac{P}{2}} f(x)\sin nwx\,dx$$

الآن سنناقش تطبيق فوريه في حل المعادلات التفاضلية الجزئية منها حل معادلة الحرارة المتجانسة ذات البعد الواحد لقضيب محدود ومعادلة الموجة المتجانسة ذات البعد الواحد الوتر محدود ومعادلة لاربلاس ذات البعدين على مستطيل وفي كل حالة مع شروط حديثة متجانسة ثم سندرس كيفية التعامل مع الشروط الحديثة المتجانسة.

أخيراً نتعامل مع الحالة التي تكون فيها المعادلة التفاضلية الجزئية غير المتجانسة والتي تسمى معادلة بواسون.

حل معادلة الحرارة المتجانسة لقضيب محدود:

مثال:

لحل معادلة الحرارة لدينا مسألة القيمة الأولية:

$$U_t = 3U_{xx}$$
$$U_{(x,0)} = x(\pi - x) \dots\dots\dots (1)$$
$$U_{(0,t)} = U(\pi, t) = 0$$

نستخدم فصل المتغيرات لحل المعادلة التفاضلية الجزئية لذلك نفترض أن الحل بالصيغة:

$$U_{(x,t)} = X(x)T(t) \dots\dots\dots (2)$$

ثم الاستبدال في المعادلة التفاضلية الجزئية نحصل على:

$$X(x)T'(t) = 3X'T'(t)$$

وهكذا:

$$\frac{T'(t)}{3T(t)} = \frac{X'(x)}{X(x)} = -\lambda$$

بالتالي:

$$X' + \lambda x = 0 \dots\dots\dots (3)$$
$$T^{-} + 3\lambda T = 0$$
$$X' + \lambda x = 0 : x(0) = x(T) = 0 = 0$$

بعد ذلك يتم فصل شروط الحدية.

$$U_{(0,t)} = 0 = X(0)T(t) \Rightarrow x(0) = 0$$
$$U_{(\pi,t)} = 0 = X(\pi)T(t) \Rightarrow x(\pi) = 0$$

إذاً لدينا:

$$X' + \lambda x = 0\,, T' + \lambda T = 0\,,\quad x(0) = x(\pi) = 0$$

الحالة (1) $\lambda < 0$:

إذا كانت $\lambda < 0$ فيمكننا كتابة $\lambda = -k^2$ لبعض الأعداد الحقيقية k مع $k > 0$.

المعادلة المميزة $r^2 - k^2 = 0$ تؤدي إلى الحلين المستقلين e^{kx} و e^{-kx} قد نأخذ:

$$X_1 = \frac{e^{kx} + e^{-kx}}{2} = \cos h(kx)$$

و

$$X_{2=}\frac{e^{kx}-e^{-kx}}{2}=\sin h(kx)$$

لذلك فإن الحل العام هو:

$$X=\ C_1\cos h\ (kx)+\ C_2\sin h(0)$$

بتطبيق:

$$X(0)=0\ \Rightarrow 0=\ C_1\cos h\ (0)+\ C_2\sin h(0)=\ C_1$$

∴ الحل المتبقي هو:

$$X(x)=C_2\sin h\ (kx)$$

تطبيق شروط الحدية الأخرى:

$$X(\pi)=0\ \Rightarrow C_2\sin h(k\pi)$$

بما أن $C=0$ لذلك

$$k>0\ \Rightarrow \sin h(k\pi)\ \neq 0$$

لذا فإن الحل الوحيد الذي يبقى من شروط الحد هو الدالة الصفرية لذلك لا توجد قيم ذاتية سلبية.

الحالة (2) $\lambda=0$:

في هذه الحالة المعادلة التفاضلية العادية (ODE) هو $X'=0$ فقط مع الحل العام:

$$X(x)=C_1x+C_2$$

$$X(0)=0\ \Rightarrow\ C_2=0\ ,x(\pi)=0\Rightarrow\ C_1\pi=0\Rightarrow\ C_1=0$$

لذلك فإن $\lambda=0$ ليست قيمة ذاتية.

الحالة (3) $\lambda>0$:

إذا كانت $\lambda>0$ يمكننا كتابة $\lambda=k^2$ بالنسبة لبعض الأرقام الحقيقية k مع $\lambda=0$ ثم المعادلة المميزة r^2+k^2 تؤدي إلى الحلين المستقلين خطياً $\sin(kx)$ ، $\cos(kx)$ وبالتالي إلى الحل العام:

$$X(x)=C_1\cos\ (kx)+\ C_2\sin(kx)$$

بتطبيق الشرط الحدودي $X(0)=0$ لدينا:

$$X(0)=0=\ C_1\cos\ (0)+\ C_2\sin(0)=\ C_1$$

لذا فإن الحالة الوحيدة التي تبقى من هذا الشرط الحدودي هي:

$$X(x)=\ C_2\sin(kx)$$

ويعطينا الشرط الحدودي الآخر:

$$X(\pi)=0=\ C_2\sin(k\pi)$$

الثابت $C_2=0$ إلا في الحالات التي يكون فيها k رقماً مع الخاصية $\sin(k\pi)=0$ بالنسبة للقيم k لا تحتاج إلى $C_2=0$ في الواقع لا توجد قيود على C_2 لذلك الحد $\sin(kx)$ يبقى من كلا الشرطين الحدين.

بعبارة أخرى تعطينا قيمة k القيم الذاتية $\lambda n=k^2$ للمسألة لكل قيم k بحيث:

$$X(x)=\ C_1\sin(kx)$$

هي الدالة الذاتية المترابطة من الناحية العلمية.

نقول إن الدالة الذاتية هي $X=\sin\ (kx)$ فإن القيم الذاتية هي تلك الأرقام $\lambda n=k^2$ حيث $\sin k\pi=0$.

لذلك $k\pi = \pi, 2\pi, 3\pi, \dots, n\pi \quad k = 1,2,3, \dots$.
حيث:

$$k = \frac{n\pi}{n} = n$$

والقيم الذاتية هي $\lambda n = n^2$
الدالة الذاتية $X_n(x) = \sin(nx), n = 1,2,3$ بعد ذلك سنعود لحل المعادلة:

$$T' + 3n^2\, T = 0 \Rightarrow T_n(t) = e^{-3n^2 t}, \lambda = \lambda n$$

الحل العام:

$$U(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-3n^2 t} \sin(nx) \dots \dots \dots (4)$$

أخيراً نحدد المعاملات من الشرط الابتدائي

$$U(x,0) = X(\pi - X) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(nx), 0 \le x \le \pi \dots \dots \dots (5)$$

الآن نحن نعلم أن متسلسلة فوريه $f(x) = x(\pi - x),\ 0 \le x \le \pi$ هـــــــــي:

$$f_s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x(\pi - x)\sin nx\, dx = \begin{cases} 8/\pi n^3 \ if\ n\ is\ odd \\ \\ 0 \quad if\ n\ is\ even \end{cases}$$

بعبارة أخرى يجب أن يكون لدينا:

$$C_n = b_n = \begin{cases} 8/\pi n^3\ , if\ n\ is\ odd \\ \\ 0 \quad , \quad if\ n\ is\ even \end{cases}$$

أي أن (5) يجب أن يكون متسلسلة فوريه الجيبية لـ $f(x) = x^2$ الحل النهائي هو الحل العـام (4) مـع هذه القيم الخاصة لـ C_n:

$$U(x,t) = \frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^3} e^{-3(2k-1)^3 t} \sin(2k-1)x$$

حل معادلة الموجة المتجانسة لوتر محدود:
حل معادلة الموجة متشابه تماماً لحل معادلة الحرارة.
مثـــــــال:
حل مسألة الموجة مع القيم الحدية والابتدائية:

$$U_{tt} = UU_{xx}$$
$$U_{(x,0)} = x(1-x)$$
$$U_t(x,0) = \cos x$$
$$U_{(0,t)} = u(1-t) = 0$$

نبدأ بفصل PDE المعادلة التفاضلية الجزئية ثابت:

$$U_{(x,t)} = X(x)T(t) \rightarrow XT' = 4X'T \,.\, \frac{T'}{4T} = \frac{X'}{X} = \lambda \rightarrow X' + \lambda x = 0, T' + 4\lambda T = 0$$

بعد ذلك يعطينا فصل الشروط الحدية:

$$X(0) = X(1) = 0$$

بعد ذلك حل مسألة القيمة الحدية كما في المثال السابق. وهذا يعطي قيمة ذاتية:

$$\lambda_n = n^2\pi^2$$

ودوال ثابتة $x_n = \sin n\pi x \ , \ n = 1,2,3,$

الآن يتم حل معادلة $\lambda = \lambda_n$:

وهنا نجد أن حل معادلة الموجة تختلف عن حل معادلة الحرارة.

$$T' + 4\lambda nT = 0 \rightarrow T' + 4n^2\pi^2 T = 0 \rightarrow$$

$$T(t) = C_1 \cos 2n\pi t + C_2 \sin 2n\pi t$$

بما أننا يجب أن نفعل هذا لكل عدد صحيح موجب n ونكتب:

$$\mathrm{T}_n(t) = C_n \cos 2n\pi t + d_n \sin 2n\pi t \ , \ n = 1,2,\ldots$$

حلول الضرب هي:

$$\mathrm{U}_n(x,t) = \sin n\pi t \,(C_n \cos 2n\pi t + d_n \sin 2n\pi t) \ , \ n = 1,2,\ldots$$

لذا فإن الحل العام هو التركيبة الخطية:

$$U(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin n\pi x \,(C_n \cos 2n\pi t + d_n \sin 2n\pi t) \ldots\ldots\ldots (6)$$

أخيراً تطبيق الشرطين الابتدائيين:

أولاً علينا حساب $\mathbf{U}_t$:

$$U_t(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin n\pi x \,(-2\,n\pi C_n \sin 2n\pi t + 2n\pi\, d_n \cos 2n\pi t)$$

إذاً لدينا

$$U(x,0) = X(1-X) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin n\pi x : 0 \le x \le 1 \ldots\ldots\ldots (7)$$

و

$$U(x,t) = \cos x = \sum_{n=1}^{\infty} 2\,n\pi d_n \sin \pi x : 0 \le x \le 1 \ldots\ldots\ldots (8)$$

لذا يجب أن يكون الجانب الأيمن من (7) هو متسلسلة فورييه الجيبية للدالة $(1-x)$ على $0 \le x \le 1$ وبالمثل لـ(8) ودالة جيب فورييه الخاصة بهم على $0 \le x \le 1$.

و(7) و(8) تصبح على التوالي

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi x = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin n\pi x$$

حيث

$$b_n = \frac{2}{1}\int_0^1 X(1-x)\sin n\pi x\, dx\,, n = 1,2,3,\ldots$$

وبالتالي

$$C_n = 2\int_0^1 X(1-x)\sin n\pi x\, dx\,, n = 1,2,3,\ldots$$

$$2n\pi\, dx = 2\int_0^1 \cos x \sin n\pi x\, dx\,, n = 1,2,3,\ldots$$

وحل (6) العام مع قيم هذه المعاملات يكون

$$U(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin n\pi x\,(-2\,n\pi C_n\ \sin 2n\pi t + 2n\pi\, d_n \cos 2n\pi t)$$

$$C_n = 2\int_0^1 X(1-x)\sin n\pi x\, dx\,, n = 1,2,3,\ldots$$

$$\mathrm{d}_n = \frac{1}{n\pi}\int_0^1 \cos x \sin n\pi x\, dx\,, n = 1,2,3\,,\ldots$$

المسائل غير المتجانسة:

يمكن أن تكون مسائل معادلة الحرارة والموجة غير متجانسة بإحدى الطرفين قد تكون المعادلة التفاضلية الجزئية PDE نفسها غير متجانسة أو قد تكون الشروط الحدية غير متجانسة فلننظر أولاً إلى عدم وجود شروط حدية متجانسة.

الشروط الحدية غير المتجانسة:

نبدأ بمعادلة الحرارة مع تثبيت كل طرف عند درجة حرارة ثابتة.

$$U_t = \propto^2 U_{xx}$$

$$U(x,0) = f(x)$$

$$U(0,t) = T_1\ , U(L,t) = T_2$$

حيث $T_1\,, T_2$ ليس بالضرورة صفر نحن نخطط لتحويل المسألة إلى مسألة متجانسة في مجهول جديد $W = (x,t)$ من أجل تحقيق ذلك نرغب في إيجاد الدالة البسيطة $V = (x,t)$ بحيث:

$W = u - V$ مستوفية

$$W_t = \propto^2 W_{xx}$$

و

$$W(0,t) = W(L,t) = 0$$

بالتأكيد سيتم استيفاء الشرط الأول إذا كانت:

$$V_t = V_{xx} = 0$$

وسيتطلب هذا أن يكون دالة خطية في X.

$$V = V(x) = C_1 x + C_2$$

ثم إذا كان:

$$W(x,t) = U(x,t) - (C_1 x + C_2)$$

لدينا:

$$W(0,t) = U(0,t) - C_2$$
$$= T_1 - C_2$$

و

$$W(L,t) = U(L,t) - (C_1 L + C_2)$$
$$= T_2 - C_1 L - C_2$$

حل المعادلتين:

$$T_1 - C_2 = 0$$
$$T_2 - C_1 L - C_2 = 0$$

حيث:

$$C_1 = \frac{T_2 - T_1}{L}$$
$$C_2 = L$$

لذا فإن W المجهول الجديد معطي بواسطة:

$$W(x,t) = U(x,t) + \frac{T_2 - T_1}{L}\ x\ -\ T_1$$

تحويل الشروط الحدية غير المتجانسة إلى متجانسة وأخيراً يصبح الشرط الابتدائي في W :

$$W(x,0) = U(x,0) + \frac{T_2 - T_1}{L}\ X\ -\ T_1$$
$$= f(x) + \frac{T_2 - T_1}{L}\ X\ -\ T_1$$

لذلك تحتاج فقط إلى حل المشكلة:

$$W_t = \propto^2\ W_{xx}$$
$$W(x,0) = f(x) + \frac{T_2 - T_1}{L}\ X\ -\ T_1$$
$$W(0,t) = W(L,t) = 0$$

وسيكون حل المسألة الأصلية هو:

$$U(x,t) = W(x,t) + V(x)$$
$$= W(x,t) + \frac{T_2 - T_1}{L}\ X\ +\ T_1$$

النتائج والتوصيات:

قدمت هذه الورقة استعراضاً شاملاً لمفهوم متسلسلة فوريه ومعاملاتها وتطبيقاتها في حل المعادلات التفاضلية الجزئية . واستنتجنا أن متسلسلات فوريه أوسع انتشاراً وأكثر كفاءة من متسلسلات تايلور في تمثيل الدوال الدورية، وخاصة الدوال غير المستمرة أو تلك التي تحتوي على انقطاعات .وتكمن أهميتها التطبيقية في قدرتها على نشر هذه الدوال بدلالة متسلسلات مثلثية، وهو ما لا يمكن تحقيقه في متسلسلات تايلور التقليدية.

نوصي باستخدام متسلسلات فوريه كأداة أساسية في تحليل الإشارات ومعرفة مكوناتها من حيث الترددات، مما يدعم مجالات الاتصالات، ومعالجة الصور، والذكاء الاصطناعي.

قائمة المراجع

أولاً: المراجع العربية

1. ثارني، ج. أ .(1989) .**المعادلات التفاضلية** (أ. ص. القرماني، و ا. م. عمر سالم، مترجمون) منشورات مجمع الفاتح للجامعات.
2. ديمدوفيج، ب. ب. **مسائل وتمارين في التحليل الرياضي** (ج 2). (ف. ص. المستيري، و ع. م. إيبش، مترجمون) .منشورات جامعة التحدي.

ثانياً: المراجع الأجنبية

1. Courant, R. (1963). Differential and Integral Calculus (Vol. L). Beastie and Son Limited.
2. Hanna, J. R. (1982). Fourier Series and Integrals of Boundary Value Problems. John Wiley and Sons.
3. Zaynab Ahmed Khalleefah (2025). Mathematical Modeling and Solution Strategies for Nonlinear Differential Equations Using Advanced Theorems. Comprehensive Journal of Humanities and Educational Studies, 1(1), 11-18.
4. Haberman, R. (2018). *Applied Partial Differential Equations with Fourier Series and Boundary Value Problems* (5th ed.). Pearson.
5. Kreyszig, E. (2011). *Advanced Engineering Mathematics* (10th ed.). John Wiley & Sons.
6. Zaynab Ahmed Khalleefah (2025). Matrix Transformations and Their Geometric Effects in 2D Space. Comprehensive Journal of Humanities and Educational Studies, 1(1), 19-27.
7. Asmar, N. H. (2016). Partial Differential Equations with Fourier Series and Boundary Value Problems (2nd ed.). Pearson.
8. DuChateau, P., & Zachmann, D. W. (2002). Applied Partial Differential Equations. Dover Publications.
9. Sneddon, I. N. (1995). Fourier Series: A Practical Introduction. Dover Publications.
10. Strichartz, R. S. (1994). A Guide to Distribution Theory and Fourier Transforms. CRC Press.

Compliance with ethical standards

Disclosure of conflict of interest

The authors declare that they have no conflict of interest.

Disclaimer/Publisher's Note: The statements, opinions, and data contained in all publications are solely those of the individual author(s) and contributor(s) and not of **JLABW** and/or the editor(s). **JLABW** and/or the editor(s) disclaim responsibility for any injury to people or property resulting from any ideas, methods, instructions, or products referred to in the content.